数論におけるvanishing cycle(代数幾何学とホッジ理論)

斎藤, 毅

数理解析研究所講究録
803巻 1992年 125-136

数論における vanishing cycle.

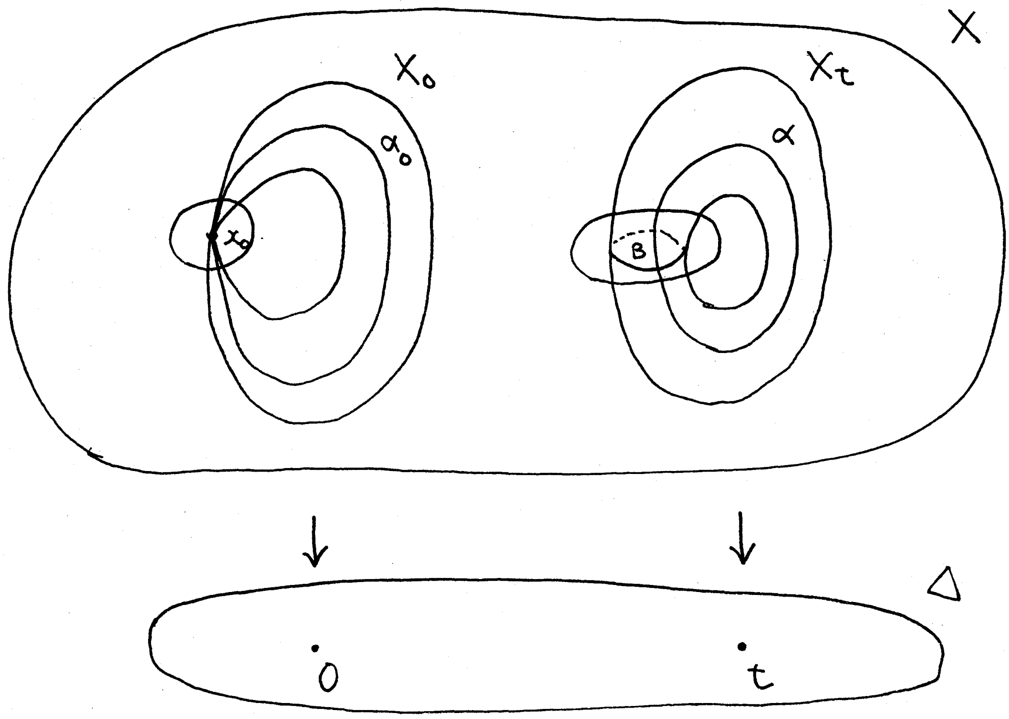
東大理 斎藤 毅 (Takeshi Saito)

題は一般的なものだが. ここではそのいくつかの側面についてのみ解説する. Langlands 対応への応用など多くの重要な側面についてはふれない. 第1節では一般的な事実を概説し. 応用として Weil 予想の証明を簡単に説明する. 第2節では具体的な計算例とその Frobenius の作用についての応用を述べる.

§1. Vanishing cycle の一般論.

Vanishing cycle は局所体上の多様体さらにはその上の ℓ 進層に対し. その cohomology を理解するための道具である. その利点は cohomology をとるという大域的な問題を. vanishing cycle を計算するという局所的な問題と. reduction 上の cohomology をとるというやはり大域的ではあるが比較的簡単な問題の2段階に分割するということにある. 局所体は punctured disc $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1, z \neq 0\}$ の代数的な類似

物と考えられるが、このときvanishing cycleの考え方は次の絵によく表わされる。



ここでXはdisc Δ上の楕円曲線の退化する族である。generic fiber X_t のH^1はαとβで生成されるが、一方closed fiber X_0のH^1はα_0だけで生成される。したがってずれのβがvanishing cycleということになるが、このβは次のような性質をもつ。すなわち特異点x_0のX内でのどんなに小さい近傍Uをとってもtを十分0に近くとれば$H^1(X_t \cap U)$はβで生成される。

話をはっきりさせるためにいくつか記号を導入する。Kを局所体とする。しばらくは局所体とは完備な離散付値をもつ

体とする．X_KをK上のschemeとし．$\mathcal{F}$をX_K上のℓ進層とする（例えば定数層$\mathbb{Q}_\ell$）．ℓは剰余体の標数pとは異なる素数とする．最近は$p=\ell$のときもFontaine, Faltings，加藤．兵頭．都築各氏らの努力により理論の整備が進んできているがここではふれない．$\mathcal{O}_K$をKの付値環としXをX_Kの$\mathcal{O}_K$上のmodelすなわち$\mathcal{O}_K$上のscheme Xで$X\otimes_{\mathcal{O}_K}K=X_K$となるものとする．このとき$\mathcal{F}$のvanishing cycleの層（正確にはnearby cycleの層と呼んだ方がよい）は各整数$q\geqq 0$に対し定まる$R^q\psi\mathcal{F}$と書かれるXのgeometric closed fiber $X_{\bar{F}}=X\otimes_{\mathcal{O}_K}\bar{F}$（$\bar{F}$は剰余体$F$の分離閉包）上の層である．（定義は後述）．

vanishing cycleの層$R^q\psi\mathcal{F}$とgeneric fiberのcohomology $H^n(X_{\bar{K}},\mathcal{F})$とは次のように結ばれている．（$\bar{K}$は$K$の分離閉包）

- Xが$\mathcal{O}_K$上properなときspectral sequence

$$E_2^{p,q}=H^p(X_{\bar{F}},R^q\psi\mathcal{F})\Rightarrow H^{p+q}(X_{\bar{K}},\mathcal{F})$$

が存在する．

これはetale cohomologyのproper base change theoremからでてくる．上の絵の例だと．

$$R^q\psi\,\mathbb{Q}_\ell=\begin{cases}\mathbb{Q}_\ell & (X_{\bar{F}}\text{上の定数層}) \quad q=0\\ \mathbb{Q}_\ell(-1)_{x_0} & (x_0\text{にのみ台をもつ1次元}\ \mathbb{Q}_\ell\text{-vector space}) \quad q=1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

となっていて．spectral sequenceはH^1については完全系列

$$0 \to H^1(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^1(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell(-1) \to 0$$

を与える．

vanishing cycleの形式的な定義は次のとおりである．K^{nr}をKの最大不分岐拡大とし$X_{\bar{F}} \xrightarrow{i} X_{O_{K^{nr}}} \xleftarrow{\bar{j}} X_{\bar{K}}$と書くと$R^q\Psi\mathcal{F} = i^* R^q \bar{j}_*(\mathcal{F}|X_{\bar{K}})$が定義である．こうすると$X_{\bar{F}}$の各geometric point $\bar{x}$に対し$R^q\Psi\mathcal{F}$の$\bar{x}$でのstalkは

$$R^q\Psi\mathcal{F} = \varinjlim H^q(U \cap X_{\bar{K}}, \mathcal{F})$$ （Uは$\bar{x}$の$X_{O_{K^{nr}}}$でのetale近傍を走る）

となり上の絵の例が示唆するものである．

一般にcohomology $H^n(X_{\bar{K}}, \mathcal{F})$への$K$の絶対Galois群$G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$の自然な作用を調べることが重要だが，これには下のようにvanishing cycleを使うことができる．それを説明する前にまずG_Kの構造およびそのℓ進表現の一般論を復習する．Kの不分岐拡大を考えることによりG_Kは剰余体の絶対Galois群G_Fを商群としてもつことがわかる．核Iを惰性群と呼ぶ．次にFの標数pでわれない整数nについて素元のn乗根を添加する拡大を考えることにより，全射$I \to \hat{\mathbb{Z}}'(1) \overset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{p \nmid n} \mu_n$を得る．ここで$\mu_n$は$\bar{F}$内の1の$n$乗根の群であり，$\hat{\mathbb{Z}}'(1)$は抽象的に位相群としては$\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$と同型である．この商$\hat{\mathbb{Z}}'(1)$が局所体$K$をpunctured disc Δ^*の類似物とみたとき．

$\pi_1(\Delta^*)=\mathbb{Z}$と対応している．この核Pはpro-p群，すなわち有限p群の逆極限（p=0のときはP=1）となることが知られている．

VをG_Kのℓ進表現，すなわち有限次元$\mathbb{Q}_\ell$-vector space Vへの連続な表現とする．このときPは有限な商を経由して作用することは直ちにわかるが，一般にまともなℓ進表現Vについては I が quasi-unipotentに作用することが知られている．例えばgeometric originをもつようなVについてはそうである．Iの作用がquasi-unipotentとはある開部分群J⊂Iに制限するとJの作用がunipotentということであり，このときJの作用は，あるVの巾零作用素Nにより任意の$\sigma\in J$に対し$\exp(t_\ell(\sigma)N)$とかける．ここでt_ℓは上の標準全射$I\to\hat{\mathbb{Z}}'(1)$のℓ成分である．このNを使ってVのmonodromy filtration Mが定義される．Mは$NM_i\subset M_{i-2}$かつ$N^i: Gr_i^M V\xrightarrow{\sim} Gr_{-i}^M V$を任意のiについてみたすただ1つのVの減少filtrationである．一意性よりMはG_Kの作用で安定なことがわかる．

G_Kのℓ進表現VでIの作用が自明なものは特にたちのよいものであり不分岐表現とよぶ．$\mathbb{Q}_\ell(1)=\mathbb{Q}_\ell\otimes\mathbb{Z}_\ell(1)=\mathbb{Q}_\ell\otimes\varprojlim_n \mu_{\ell^n}$やそのdual $\mathbb{Q}_\ell(-1)$などがそうである．Iの作用がunipotentなものもたちのよいものでありここではstable表現と呼ぼう．またPの作用が自明なものをtameな表現とよぶ．明らかに不分岐⇒stable⇒tameである．

さて K の絶対 Galois 群 G_K は商 G_F を通じて X の geom. closed fiber $X_{\bar{F}}$ へ作用する. vanishing cycle の定義から G_K は $X_{\bar{F}}$ 上の層 $R^q\Psi\mathcal{F}$ へ equivariant に作用することがわかる. 従って3ページ前の spectral sequence の E_2-term に G_K が作用するが, この作用によりこの spectral sequence は G_K-equivariant である.

定数係数 cohomology $H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ については X_K が good reduction をもつとき, すなわち proper smooth な O_K 上の model が存在するときにはそれが不分岐表現であることが知られている. (これは正標数の多様体が標数 0 にもちあがるときには, そのもちあげの cohomology と同じ cohomology をもつということであり, etale cohomology はもともとそのような cohomology 理論を作ろうとして構成されたものであった.). これに対応して $H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が stable 表現となるためには X_K が stable model をもつことが十分であることが, vanishing cycle を作って示せる. 局所体 K 上の proper smooth な scheme X_K に対しその semi-stable model とは O_K 上の proper flat な model X で X 自身は regular かつ closed fiber X_F が X の(被約な)正規交叉因子となるものである(剰余体 F が完全でないときはもう少し厄介だが略す). このような X については次節でのべる vanishing cycle の計算から各 $R^q\Psi\mathbb{Q}_\ell$ への I の作用が

自明であることがわかり．これとspectral sequenceから$H^n(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$がstable表現であることが従う．

Weil予想について説明するためにweightの概念を導入する．$\mathbb{F}_q$を有限体とし$\varphi_q \in G_{\mathbb{F}_q}$をgeometric Frobenius．すなわちq乗写像の逆写像とする．$G_{\mathbb{F}_q}$のℓ進表現Vがweight nをもつとは．φ_qのVへの作用の固有値がすべて代数的数でありその任意の共役の複素絶対値が$q^{\frac{n}{2}}$となることである．Kを剰余体が有限な局所体でVをG_Kのℓ進表現とする．このときVのweightを2とおり考えることができる．1つめはKの剰余体Fのgeometric Frobenius $\in G_F$のG_Kへのもちあげの固有値を考えることである．2つめはKがある代数体kの素点pでの完備化でVがG_kの表現でkの素点の有限集合Sの外で不分岐なもののひきもどしである場合である．今この2つめの状況でkの任意の素点$\mathfrak{p}' \notin S, \neq \mathfrak{p}$に対し．Vの$\mathfrak{p}'$でのweight nをもつときVはweight nをもつということにする．すると当然このとき1つめの意味でのweightがどうなるかが問題となるが．これについては次のように予想される．VへのIの作用がquasi-unipotentと仮定し．monodromy filtrationによる$gr^M_i V$を考える．するとIの各gr^M_iへの作用は有限群を経由するからweightの定義はFのFrobeniusのもちあげによらず

予想　Vが2つめの意味でweight nをもつならば、
各iについて $gr^M_i V$ は1つめの意味でweight
$n+i$ をもつ。

この予想は正標数の場合にはDeligneによりWeil予想の証明の中で解かれている。証明にはζ函数の収束域の評価を使う。またHodge moduleについてのこの類似も解かれているがこの本来の場合は（$V=H^n(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ で X が semi stable model をもつ場合でも $\dim X_K \geq 3$ では）未解決である。

Weil予想の証明のアイデアを上の予想（正標数だからOK）の使われ方を中心に簡単に説明する。Xを有限体F上のn+1次元projective smooth varietyとする。Lefschetz pencilをとって $f: X \to \mathbb{P}^1$ を作る。$H^{n+1}(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ がweight n+1をもつことを示したいわけであるが、spectral sequenceより、$H^1(\mathbb{P}^1, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)$ についてみればよい。$y \in \mathbb{P}^1$ を f の critical value とする。このとき $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ が y で　　　でなければ2つめの意味でweight nをもつことというのがポイントである。なぜなら各yで適用すると、$R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ は①$\mathbb{P}^1$上いたるところ不分岐であるかすなわち閉体までいけば定数層であるかまたは②weight nをもつことになり、①ならば $H^1=0$、②ならば H^1 のweightがn+1であること（これには X^N（N個の直積））を使う）が導かれる。上のポイントを示すためには、まず値は

不明だが weight が定義されることを見る. これがいえたとするともし f で smooth でなければ vanishing cycle の計算 (Picard-Lefschetz 公式) により Gr^M_1 の weight が $n+1$ とわかりしたがって $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ が weight n をもつことが上の予想によりわかる.

以上について証明などくわしくは

SGA 7 Lect Notes Math. 288. 340

特に exp. I XIII XV など.

—— $4\frac{1}{2}$ 同 549 Th. de finitude

Weil 予想 I. II Publ Math IHES 43. 52.

§2. 具体例と Frobenius の作用への応用.

Picard-Lefschetz 公式のように孤立特異点でその vanishing cycle の計算が知られているものもあるがここでは下のようなものを考える. この節の結果についてくわしくは

T. Saito. ε-factor of ℓ-adic sheaf on a variety

東大 プレプリント シリーズ (1991)

をみて下さい.

前節と同様に O_K を局所体の整数環とする. 剰余体 F は完全と仮定する. X を O_K 上 flat な正則 scheme で general fiber X_K は smooth で closed fiber の被約化 $D = X_{F,red}$ は X の正規交叉因

子であるようなものとする．X が O_K 上 log smooth であると仮定すると X_K 上の定数層の vanishing cycle は完全に計算することができる．log smooth というのは X_F の各既約成分の重複度が F の標数 p でわれないという条件（p=0 なら自明）よりやや弱いものである．対数極つき相対微分形式の加群を

$$\Omega^1_{X/O_K}(\log D/\log F) = (\Omega^1_{X/O_K} \oplus O_X \otimes j_* O^\times_{X_K}) \Big/ \begin{pmatrix} da - a \otimes a\,; & a \in O_X \cap j_* O^\times_{X_K} \\ 1 \otimes b\,; & b \in K^\times \end{pmatrix}$$

と定義する．$1 \otimes a$ の類が $d\log a$ である．この層が局所自由となるとき X は O_K 上 log smooth であるという．簡単のため各重複度は p 巾（p=0 なら 1）であるとする．

命題（上記 §2 Prop 6'）上のように X を O_K 上 log smooth な scheme とし closed fiber X_F の各既約成分 D_i の重複度は p 巾であるとする．このとき次の標準同型がある．

$$R^i\psi\, \mathbb{Q}_\ell \cong \Lambda^i(\mathrm{Coker} : \mathbb{Q}_\ell(-1)_{X_F} \to \bigoplus_i \mathbb{Q}_\ell(-1)_{D_i})$$

上では簡単のため重複度は p 巾，層は定数層としたが，一般の場合でも層の分岐が D に沿って tame と仮定すれば同様な計算がなりたつ．（上記 Prop 6）．また log smooth の仮定をはずした場合は tame な部分すなわち pro-p 群 P の作用で不変な部分に限れば命題がなりたつことが，etale cohomology の

purity とよばれるある standard な予想の下で示されている.
上の命題は K のかわりに Δ^* を考えたときの位相的な結果の類似である. 前節の spectral sequence に上の命題を適用すると X が proper の場合に cohomology の記述がえられる. その帰結については例えば(上記 Prop 6 の Cor 1, 2).

最後に上の計算の応用例として有限体上の多様体上の ℓ進層の cohomology への Frobenius の作用について述べる.

定理（上記 Thm 1）. F を有限体. X を F 上 projective smooth な n 次元 variety. U を X の open で complement $D=X-U$ が正規交叉因子であるようなものとする. $\mathcal{F}$ を U 上の smooth ℓ進層で D に沿った分岐が高々 tame とする. φ_F を F の geometric Frobenius とし $\det(\varphi_F; R\Gamma_c(U_{\bar F}, \mathcal{F})) = \prod_{i=0}^{2n} \det(\varphi_F; H^i_c(U_{\bar F}, \mathcal{F}))^{(-1)^i}$ とすると

$$\frac{\det(\varphi_F : R\Gamma_c(U_{\bar F}, \mathcal{F}))}{\det(\varphi_F : R\Gamma_c(U_{\bar F}, \mathbb{Q}_\ell))^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}} = \det\rho(-c_{X,U/F}) \times \text{Jacobi 和}$$

がなりたつ.

ここで右辺は ρ は $\mathcal{F}$ に対応する $\pi_1(U)^{\mathrm{tame}}$ の ℓ進表現. $c_{X,U/F} \in CH^n(X,D)$ は城崎のシンポジウムで話した relative chern 類. $\det\rho$ は類体論の相互写像 $CH^n(X,D) \to \pi_1^{ab}(U)^{\mathrm{tame}}$ を通して $CH^n(X,D)$ の指標とみる. Jacobi 和は $\mathcal{F}$ の D にそっての分岐

から定まる1の巾根の群の指標を使って定義される.

証明の方針をざっと述べる. Lefschetz pencil を使って $\mathbb{P}^1$ への fibration $f: X \to \mathbb{P}^1$ を作る. f の singularity を blow up して f は log smooth とする. Laumon による ε-factor の積公式を使って右辺を $\mathbb{P}^1$ の各点の寄与(局所 ε-factor と呼ぶ)の積に分解する. $y \in \mathbb{P}^1$ が f の smooth pt ならば局所 ε-factor は, $f^{-1}(y)$ についての定理の左辺(の巾)であり, これは帰納法の仮定により求める. $y \in \mathbb{P}^1$ が f の critical value のときは, 上の命題とそのあとに述べたことを使って vanishing cycle の計算ができてこれから局所 ε-factor が求まる(上記 Thm 2). これらをあわせて整理すると定理の右辺がえられる.